

▷ 1. Найдите сумму  $S$  всех целых решений неравенства

$$|x - \sqrt{x} - 3| + |\sqrt{x} + 7 - x| \leq 6.$$

Ответ: 60.

▷ 2. Положительные числа  $x, y, z$  таковы, что

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 75 \\ y^2 + yz + z^2 = 121 \\ z^2 + zx + x^2 = 196. \end{cases}$$

Чему равняется  $xy + yz + zx$ ?

Ответ: 110.

▷ 3. Девятизначное натуральное число  $A$ , записанное в десятичной системе счисления, получается из числа  $B$  перестановкой последней цифры  $a$  в первое место. Известно, что число  $B$  взаимно просто с числом 18 и  $B \leq 222222222$ . Найти наибольшее среди чисел  $A$ , удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 922222220.

▷ 4. Найти все значения параметра  $a$ , при которых система уравнения

$$\begin{cases} |3x - 2a + 6| = 3y \\ |3y - a + 6| = 3x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: 4.

▷ 5. Чему равен радиус вписанного круга в треугольник с целочисленными сторонами, если один из углов равен  $\frac{1}{2} \arcsin \frac{13}{85} + \arctg 13$ , а две стороны 84 и 85.

Ответ: 12.

▷ 6. Функция, при всех допустимых значениях  $x$ , удовлетворяет равенству

$$f(x) + 2f(1-x) = x^2.$$

Пусть  $M$  - наименьшее её значение достигается в точке  $x_0$ . Чему равна дробь  $\frac{x_0}{1+M}$ ?

Ответ: 6.

▷ 7. Вкладчик положил в банк на депозит некоторую сумму денег и в течение пяти лет не снимал деньги со счёта и не делал дополнительных взносов. В течение первых трёх лет банк ежегодно начислял вкладчику проценты по депозиту по постоянной процентной ставке. После этого в стране разразилась инфляция. И хотя банк продолжал ежегодно начислять проценты по вкладу по прежней годовой ставке, деньги в результате инфляции обесценились настолько, что вкладчик каждый год в течение последних двух лет стал нести убытки. Величина убытков в процентном исчислении составляла ровно половину от исходной годовой процентной ставки. При какой исходной процентной ставке, не превышающей 200 % годовых, вкладчик будет иметь максимальный суммарный прирост денежных сбережений за пять лет?

Ответ: 80.

▷ 8. Сколько корней имеет уравнение

$$\sin \frac{\pi x}{3} (\lg(x+5) + \lg(400-x)) = 0.$$

Ответ: 137.

▷ 9. Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются в порядке убывания слева направо. Числа не могут начинаться с цифры 0. Записать найденную вероятность в виде несократимой дроби  $\frac{m}{n}$ . В ответе записать  $m^2 + n^2$ .

Ответ: 229.

▷ 10. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{(x^4 - 16x^2 + 48) |x - 3|} + \lg(2022 + 331x - x^2).$$

В ответе запишите число всех целых значений из области определения.

Ответ: 341.

▷ 1. Найдите все натуральные решения неравенства

$$|2\sqrt{x} + 1 - x| + |x - 2\sqrt{x} + 2| \leq 7.$$

В ответе запишите среднее арифметическое всех найденных значений.

Ответ: 5.

▷ 2. Положительные числа  $x, y, z$  таковы, что

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 169 \\ y^2 - yz + z^2 = 196 \\ z^2 + zx + x^2 = 225. \end{cases}$$

Найдите  $\frac{1}{\sqrt{2}} |xy + yz - zx|$ .

Ответ: 84.

▷ 3. Девятизначное натуральное число  $A$ , записанное в десятичной системе счисления, получается из числа  $B$  перестановкой последней цифры а первое место. Известно, что число  $B$  взаимно просто с числом 18 и  $B \geq 222222222$ . Найти наименьшее среди чисел  $A$ , удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 122222224.

▷ 4. Найти все значения параметра  $a$ , при которых система уравнения

$$\begin{cases} |7x + a + 7| = 7y \\ |7y + 6a - 21| = 7x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: 2.

▷ 5. Чему равен радиус вписанного круга в треугольник с целочисленными сторонами, если один из углов равен  $\frac{1}{2} \arccos \frac{15}{17} + \arctg 4$ , а две стороны 17 и 15.

Ответ: 3.

▷ 6. Функция, при всех допустимых значениях  $x$ , удовлетворяет равенству

$$g(x) + 2g\left(\frac{2}{x}\right) = -(x+1).$$

Пусть  $M$  - наименьшее её значение при  $x \in (0, +\infty)$  и достигается в точке  $x_0$ . Чему равна дробь  $\frac{x_0}{M-2}$ ?

Ответ: 6.

▷ 7. Мистер X решил открыть собственное дело и вложил в него определённую сумму денег (первоначальный капитал). В первый год мистер X получил прибыль. Во второй год наш предприниматель понес убытки причём их процент по отношению к финансовым результатам первого года (первоначальный капитал плюс прибыль) был равен проценту прибыли, полученной в предыдущем году. Третий год ознаменовался большой прибылью: её процент в 4 раза превысил, полученной в первом году. При каком исходном проценте мистер X сможет получить наибольшую суммарную прибыль за 3 года (убытки рассматриваются как отрицательная прибыль).

Ответ: 50.

▷ 8. Сколько корней имеет уравнение

$$\cos \frac{\pi(x-3)}{2} \sqrt{\left(\frac{x}{4} - 1\right) \left(200 - \frac{3x}{2}\right)} = 0.$$

Ответ: 66.

▷ 9. Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются в порядке возрастания слева направо. Числа не могут начинаться с цифры 0. Записать найденную вероятность в виде несократимой дроби  $\frac{m}{n}$ . В ответе записать  $m^2 + n^2$ .

Ответ: 5674.

▷ 10. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\lg(x^2 - 2x - 2)} + \sqrt{24 + 5x - x^2}.$$

В ответе запишите сумму всех целых значений из области определения.

Ответ: 27.

▷ 1. Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$|x - \sqrt{x} - 2| + |6 + \sqrt{x} - x| \leq 8.$$

Ответ: 66.

▷ 2. Положительные числа  $x, y, z$  таковы, что

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 108 \\ y^2 - yz + z^2 = 36 \\ z^2 + zx + x^2 = 144. \end{cases}$$

Найдите  $xy + yz + zx$ .

Ответ: 72.

▷ 3. Восьмизначное натуральное число  $A$ , записанное в десятичной системе счисления, получается из числа  $B$  перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число  $B$  взаимно просто с числом 57 и  $B \leq 77777777$ . Найти наибольшее среди чисел  $A$ , удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 97777775.

▷ 4. Найти все значения параметра  $a$ , при которых система уравнения

$$\begin{cases} |21x + a + 14| = 21y \\ |7y + 2a - 14| = 7x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: 4.

▷ 5. Чему равен радиус вписанного круга в треугольник с целочисленными сторонами, если один из углов равен  $\frac{1}{2} \arcsin \frac{12}{13} + \arctg 5$ , а две стороны 15 и 17.

Ответ: 3.

▷ 6. Функция, при всех допустимых значениях  $x$ , удовлетворяет равенству

$$2f(x) + 3f(4 - x) = 5x^2.$$

Пусть  $M$  - наименьшее её значение достигается в точке  $x_0$ . Чему равна дробь  $\frac{x_0}{100+M}$ ?

Ответ: 3.

▷ 7. Фирма осуществляла капиталовложение на определённую сумму денег в некоторый проект. По истечении первого года фирма получила некоторый процент прибыли на вложенный капитал. Однако по истечении второго года фирма понесла убытки. Причём их процент по отношению к финансовым результатам предыдущего года (первоначально авансированный капитал плюс прибыль) был в точности равен проценту прибыли, полученной в предыдущем году. Аналогичным образом третий, четвёртый и пятый годы чередовались получением прибыли, несением убытков и снова получением прибыли. Причём всякий раз процент прибыли или убытков по отношению к финансовым результатам предыдущего года был таким же, как и в первые два года. При каком исходном проценте, не превышающем 100 %, суммарная прибыль фирмы за 5 лет будет наибольшей. Убытки рассматриваются как отрицательная прибыль.

Ответ: 20.

▷ 8. Сколько корней имеет уравнение

$$\sin \frac{\pi x}{4} (\lg(x+3) + \lg(300-x)) = 0.$$

Ответ: 77.

▷ 9. Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются в порядке неубывания слева направо. Числа не могут начинаться с цифры 0. Записать найденную вероятность в виде несократимой дроби  $\frac{m}{n}$ . В ответе записать  $m^2 + n^2$ .

Ответ: 3721.

▷ 10. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{(x^4 - 44x^2 + 288) |x - 5|} + \lg(56 + 5x - x^2).$$

В ответе запишите сумму всех целых значений из области определения.

Ответ: 12.

▷ 1. Найдите сумму всех целых решений неравенства

$$|3\sqrt{x} + 2 - x| + |x - 3\sqrt{x} + 3| \leq 9.$$

Ответ: 136.

▷ 2. Положительные числа  $x, y, z$  таковы, что

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 169 \\ y^2 + yz + z^2 = 196 \\ z^2 + zx + x^2 = 225. \end{cases}$$

Чему равняется  $\frac{1}{\sqrt{3}}(xy + yz + zx)$ ?

Ответ: 112.

▷ 3. Восьмизначное натуральное число  $A$ , записанное в десятичной системе счисления, получается из числа  $B$  перестановкой последней цифры на первое место. Известно, что число  $B$  взаимно просто с числом 57 и  $B \geq 77777777$ . Найти наименьшее среди чисел  $A$ , удовлетворяющих этим условиям.

Ответ: 17777779.

▷ 4. Найти все значения параметра  $a$ , при которых система уравнения

$$\begin{cases} |2x - a + 2| = 2y \\ |6y + 2a + 6| = 6x \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений.

Ответ: 3.

▷ 5. Чему равен радиус вписанного круга в треугольник с целочисленными сторонами, если один из углов равен  $\frac{1}{2}\arcsin\frac{12}{37} + \arctg 6$ , а две стороны 12 и 35.

Ответ: 5.

▷ 6. Функция, при всех допустимых значениях  $x$ , удовлетворяет равенству

$$g(x) + 2g\left(\frac{x}{x-1}\right) = x.$$

Пусть  $M$  - наибольшее значение функции  $(x-1)g(x)$ , которое достигается в точке  $x_0$ . Чему равна дробь  $\frac{x_0}{M}$ ?

Ответ: 2.

▷ 7. Маклер осуществил удачную сделку, в результате которой получил некоторый процент прибыли на вложенный капитал. За тем он вложил первоначальный капитал и полученную прибыль в новую операцию и понес убыток, в процентном отношении равный первоначальному проценту прибыли. После третьей (также неудачной) сделки процент убытков возрос в 4 раза по сравнению с процентом прибыли после первой сделки. При каком исходном проценте такая деятельность маклера приведет к его наибольшим возможным суммарным потерям. Ответ округлить до целого числа.

Ответ: 67.

▷ 8. Сколько корней имеет уравнение

$$\cos \frac{\pi(x-2)}{4} \sqrt{\left(\frac{x}{8} + 1\right) \left(150 - \frac{2x}{3}\right)} = 0.$$

Ответ: 60.

▷ 9. Из полного набора трёхзначных чисел наудачу выбирается одно. Найти вероятность того, что цифры в записи этого числа располагаются в порядке невозрастания слева направо. Числа не могут начинаться с цифры 0. Записать найденную вероятность в виде несократимой дроби  $\frac{m}{n}$ . В ответе записать  $m^2 + n^2$ .

Ответ: 95329.

▷ 10. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\lg(x^2 - 4x - 4)} + \sqrt{21 + 4x - x^2}.$$

В ответе запишите сумму всех целых значений из области определения.

Ответ: 12.